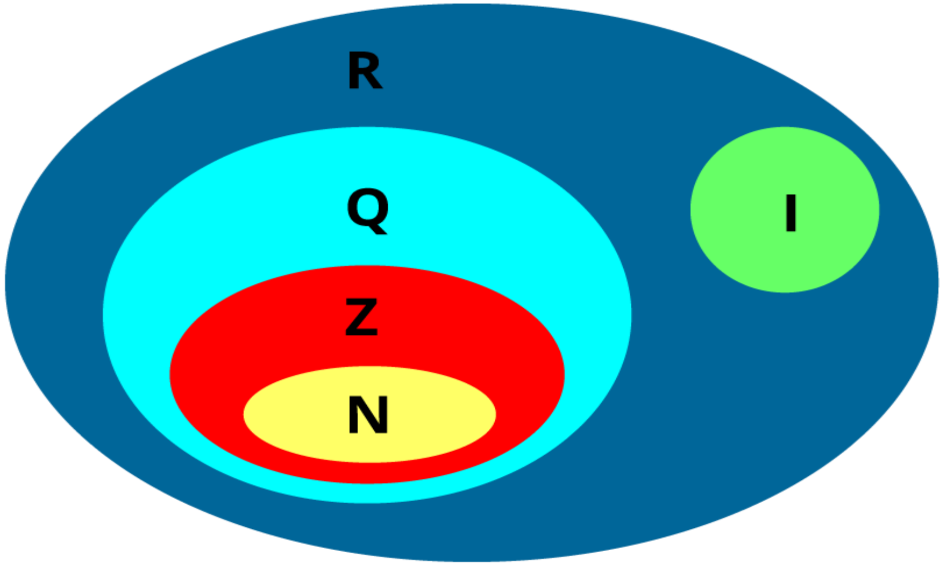
SZÁMHALMAZOK



- **N** – természetes számok halmaza
- **Z** – egész számok halmaza
- **Q** – racionális számok halmaza
- **I** – irracionális számok halmaza
- **R** – valós számok halmaza
  (R = Q ∪ I)

SZÁMHALMAZOK
Természetes számok halmaza - N

- Természetes számok halmazának nevezzük a N**={ 1,2,3,4,5,…}** számok által alkotott halmazt.
- A nullával kibővített természetes számok halmaza pedig N_0**={ 0,1,2,3,4,5,…}**
- A természetes számok halmaza végtelen, ugyanis érvényes:

a) **1 ∈ N**

b) $\boldsymbol{k} \in$ **N** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{k+1} \in$ **N.**

A $\boldsymbol{k+1}$ számot a $\boldsymbol{k}$ szám **rákövetkezőjének**

nevezzük.

SZÁMHALMAZOK
Természetes számok halmaza - N

<u>A természetes számoknak az összeadásra és szorzásra vonatkozó eddig megismert tulajdonságai</u> :

- A természetes számok halmaza **<u>zárt</u>** az összeadásra nézve, vagyis:

  $(\forall a, b \in N)\ a+b \in N$.

- **$(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$** (az összeadás **<u>kommutatív</u>** művelet)

  pl. $5+3 = 3+5 = 8$

- **$(\forall a, b, c \in N)\ (a + b) + c = a + (b + c)$** (az összeadás **<u>asszociatív</u>** művelet)

  pl. $(8+7)+3 = 8+(7+3)$

  $15 + 3 = 8 + 10 = 18$

SZÁMHALMAZOK
Természetes számok halmaza - N

- A természetes számok halmaza **zárt** a szorzásra nézve, vagyis:

  ($\forall$a, b $\in$ N) a $\cdot$ b $\in$ N.

- **($\forall$a, b $\in$ N) a $\cdot$ b = b $\cdot$ a** (a szorzás **kommutatív** művelet)

  Pl. $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8 = 40$

- **($\forall$a, b, c $\in$ N) (a $\cdot$ b) $\cdot$ c = a $\cdot$(b $\cdot$ c)** (a szorzás **asszociatív** művelet)

  Pl. $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2) = 30$

- **($\exists$1 $\in$ N)($\forall$a $\in$ N) 1 $\cdot$ a = a $\cdot$ 1 = a** (az **1** a **szorzás semleges eleme**)

- **($\forall$a, b, c $\in$ N) a $\cdot$(b + c) = a $\cdot$ b + a $\cdot$ c** (a szorzás az összeadásra nézve **disztributív**)

  Pl. $\mathbf{4} \cdot (3 + 5) = \mathbf{4} \cdot 3 + \mathbf{4} \cdot 5$, mivel

  $4 \cdot 8 = 12 + 20 = 32.$

SZÁMHALMAZOK
Természetes számok halmaza - N

$1<2<3<\ldots<n<n+1<\ldots$

Def(≤): **$a \leq b \Leftrightarrow a<b \vee a=b$.**

Erre a relációra érvényesek a következő tulajdonságok:

- **$(\forall a, b \in N)\ a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a=b$** (a ≤ reláció antiszimmetrikus)
- **$(\forall a, b, c \in N)\ a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$** (a ≤ reláció tranzitív tulajdonságú)
- **$(\forall a, b, c \in N)\ a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$** (az összeadás megőrzi a ≤ relációt)
- **$(\forall a, b, c \in N)\ a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$** (a szorzás megőrzi a ≤ relációt)

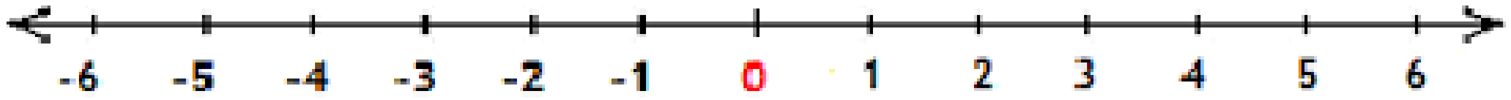
$(N, \leq)$ - rendezett struktúra

SZÁMHALMAZOK
Egész számok halmaza - Z

A kivonás és az osztás nem minden esetben végezhető el a természetes számok halmazán. Például: $7 - 13 \notin N$ vagy $17 : 9 \notin N$.

Az egész számok halmaza a természetes számok halmazának bővítése, amelyben a kivonás mindig elvégezhető.

- Jele : **Z = {… -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; …}**



- Mivel **N** $\subset$ **Z** halmaznak, ezért a **Z** halmazban is érvényesek az összeadásra és szorzásra az imént felsorolt tulajdonságok.
- A **Z** halmaz is rendezett a **≤** relációval.

SZÁMHALMAZOK
Egész számok halmaza - Z

- Valamint érvényes:

➢ **(∀a, b ∈ Z) a-b ∈ Z** (a Z halmaz a kivonásra nézve is **zárt**)

➢ **(∀a ∈ Z) a+0 = 0+a = a** (a **0** az összeadás **semleges eleme**)

➢ **(∀a ∈ Z) a+(-a) = (-a)+a = 0** (-a az a szám **ellentett száma**)

Néhány példa a műveletekre:

a) 3 – 5 = -2 b) -8 – 7 = -15 c) 11 + (-9) = 2 d) 8 + (-8) = 0

e) 3 · (-5) = -15 f) -8 · (-7) = 56 g) 25 : (-5) = -5 h) -100 : (-4) = 25

SZÁMHALMAZOK
Racionális számok halmaza - Q

Az egész számok halmazán az osztás nem mindig végezhető el. Például 3:4 nem egész szám. Ahhoz, hogy az ilyen osztás is elvégezhető legyen, bevezettük a **törtszámok (racionális számok)** fogalmát.

- Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként $\frac{a}{b}$, ahol b≠0, **racionális számoknak** nevezzük. Az **a** a tört számlálója, **b** pedig a nevezője.
- A racionális számok halmazának jele: **Q**
- A racionális számok felírhatók tört alakban, mint pl. x = $\frac{4}{5}$, ahol a számláló és a nevező relatív prímek, vagy tizedes tört alakban is. Tizedes tört alakjuk lehet:
  1. véges , pl. x = 3,25
  2. végtelen, de szakaszos (periodikus) pl. x = 4:3=1,33333…=$1,\dot{3}$

SZÁMHALMAZOK
Racionális számok halmaza - Q

A Q halmazban értelmeznünk kell az alapműveleteket.

Legyen az a = $\frac{m}{n}$ és b = $\frac{p}{q}$ két racionális szám. Ekkor:

- $a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$ például: $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$
- $a - b = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq-np}{nq}$ például: $\frac{3}{5} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6 - 5 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{18-25}{30} = -\frac{7}{30}$
- $a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$ például: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{55}$
- $a : b = \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$ például: $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

Az így bevezetett összeadás és szorzás műveletére érvényesek mindazok a tulajdonságok, amelyek érvényesek voltak a Z halmazon belül.

SZÁMHALMAZOK
Racionális számok halmaza - Q

- Ezen az új **Q** halmazon belül már az **a · x = b** (a, b ϵ Q) egyenletet is egyértelműen meg lehet oldani.

Az **a · x = 1** egyenlet megoldása az $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$ szám, amit az $\boldsymbol{a}$ szám **reciprok értékének** nevezünk és az $\boldsymbol{a^{-1}}$ módon jelölünk.

- Megállapítható, hogy a **Q** halmazon belül érvényes még egy új tulajdonság is:

$$\mathbf{(\forall\, \boldsymbol{a} \in Q\backslash\{0\})\ (\exists \boldsymbol{a}^{-1} \in Q)\ \ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-1} \cdot \boldsymbol{a} = 1}$$

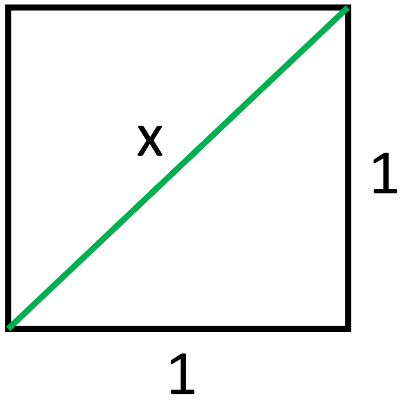
- A **(Q, ≤)** is rendezett struktúra, valamint érvényes, hogy bármely két racionális szám között vannak még más racionális számok. Ez a természetes és egész számok halmazára nem mondható el.

SZÁMHALMAZOK
Irracionális számok halmaza - I

- A Pitagorasz-tétel felhasználásával megállapíthatjuk, hogy ha a négyzet oldalának a hossza 1 egység, akkor az átlója az $x^2 = 2$ egyenlet megoldása kell, hogy legyen.

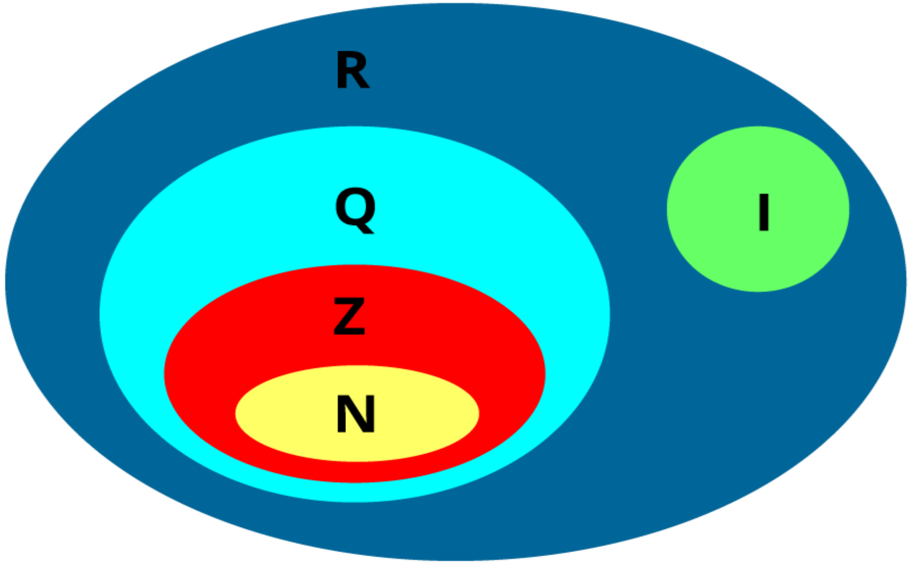
  Viszont érvényes az alábbi

  Tétel: Nincs olyan x racionális szám, amely gyöke az $x^2 = 2$ egyenletnek. Az egyenlet megoldása $x = \sqrt{2}$ és nem racionális szám.



- Szükségessé vált a Q halmaz kibővítése olyan nem racionális számokkal, mint amilyenek a $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, π stb.
- Ezeket a számokat **irracionális számoknak** nevezzük, az összes ilyen szám halmazát pedig az irracionális számok halmazának, és **I** betűvel jelöljük.

SZÁMHALMAZOK
Valós számok halmaza - R



$N \subset Z \subset Q \subset R$

$R = Q \cup I$