Kombinatorika - kidolgozott típuspéldák

	minden dolog különböző	lehetnek köztük egyformák
az összes dolgot sorba rakjuk	**ismétlés nélküli permutáció** Hányféleképpen lehet sorba rakni n különböző dolgot? $P=1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n=n!$ *például*: hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé 5 ember? $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$	**ismétléses permutáció** Hányféleképpen lehet sorba rakni n dolgot, ha köztük n_1, n_2, ..., n_k darab egyforma van? $(n_1+n_2+...+n_k=n)$ $P=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$ *például*: hányféleképpen lehet sorba rakni 2 kék és 3 piros golyót? $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{120}{2\cdot 6}=10$
választunk néhányat a dolgok közül (nem számít a sorrend)	**ismétlés nélküli kombináció** Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk? $C=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ *például*: lottó (90 számból választunk ötöt, nem számít a kiválasztás sorrendje) $\binom{90}{5}=\frac{90!}{5!\cdot 85!}=43949268$	**ismétléses kombináció** **(NEM érettségi anyag!)** Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk? *például*: a lottóhúzásnál minden alkalommal visszateszem a kihúzott golyót, így egy szám többször is szerepelhet
választunk néhányat a dolgok közül és sorba rakjuk őket	**ismétlés nélküli variáció** Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk? $V=\frac{n!}{(n-k)!}$ *például*: egy 10 csapatos bajnokságban hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón? $\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=8\cdot 9\cdot 10=720$	**ismétléses variáció** Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk? $V=n^k$ *például*: totó (a 3 lehetséges végeredményből (1, 2, x) képezünk 14 (13+1) hosszúságú sorozatokat) $3^{14}=4782969$

A feladatok jelentős része vegyes típusú, ahol nem a fenti képleteket, hanem a képletek megalkotásához alkalmazott gondolatmenetet kell használni; vagy egyértelműen valamelyik fenti típusba tartozik, de "józan paraszti ésszel", képlet használata nélkül egyszerűbben megoldható. (Kivételt jelentenek a kombináció-típusú feladatok (azaz, ahol a sorrend nem számít), itt "agyalás" helyett az $\binom{n}{k}$ képletbe helyettesítünk.)

Például:

- *hány 5 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?*

(ismétlés nélküli permutáció)

az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok stb., így összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=120$
szám készíthető

- *hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?*

(ismétlés nélküli variáció)

az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok, azaz összesen $5 \cdot 4 \cdot 3=60$ szám készíthető

- *hány 3 jegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?*

(ismétléses variáció)

mindhárom helyre bármelyik számjegy kerülhet, így összesen $5 \cdot 5 \cdot 5=125$ szám készíthető

- *hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?*

(vegyes feladat)

az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre a maradék 4-ből bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra a maradék 3-ból bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2=96$ szám készíthető

- *hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?*

(vegyes feladat)

az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra szintén bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=500$ szám készíthető

Típusfeladatok:

Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik?

(ismétlés nélküli kombináció)

1. megoldás: az első ember 9 másikkal fog kezet, a második 8 emberrel (az elsővel való kézfogását az első embernél már beszámítottuk), a harmadik 7 emberrel stb., azaz összesen 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 kézfogás történik.

2. megoldás: minden ember 9 másikkal fog kezet, ez összesen 9·10=90. Így azonban minden kézfogást duplán számolunk (mindkét "kézfogónál" beleszámítjuk), tehát kettővel el kell osztani, azaz összesen 90/2=45 kézfogás történik.

3. megoldás: annyi kézfogás történik, ahányféleképpen kiválaszthatunk 2 embert a 10-ből. Azaz "10 alatt a 2"=10!/(2!·8!)=45

Egy 12 csapatos labdarúgótornán hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

(ismétlés nélküli variáció)

Az első helyre a 12 csapatból bármelyik kerülhet, a második helyre a maradék 11-ből, a harmadikra a maradék 10-ből választhatunk, azaz összesen 12·11·10=1320-féle sorrend lehetséges.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van?
(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(ismétléses variáció)

Mind az 5 házhoz használhatjuk bármelyiket a 4-féle festék közül, azaz összesen 4·4·4·4·4=1024 lehetőség van.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 7-féle festékünk van, és minden háznak különböző színűnek kell lenni?
(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(ismétlés nélküli variáció)

Az első házhoz 7-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 6-ból, a harmadikhoz a maradék 5-ből stb., azaz összesen 7·6·5·4·3=2520 lehetőség van.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van, és a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek?
(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(vegyes feladat)

Az első házhoz 4-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 3-ből, a harmadikhoz szintén 3-ból (a második ház színét nem választhatjuk, de az elsőét igen), az összes továbbihoz is 3 színből, azaz összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ lehetőség van.

Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, egy zöld, egy kék, egy piros és egy sárga golyót?

(ismétlés nélküli permutáció)

Az első helyre 5 színből választhatunk, a másodikra a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból stb., azaz összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetőség van.

Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?

(ismétléses permutáció)

Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ lehetőségünk volna. A két zöld golyót $2 \cdot 1 = 2$, a három kéket pedig $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a 720 lehetőséget 2-vel, ill. 6-tal el kell osztani, azaz összesen $720/(2 \cdot 6) = 60$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki csak egy könyvet kaphat?

(ismétlés nélküli variáció)

Az első könyvet a 10 ember közül bárkinek adhatjuk, a második könyvet a maradék 9, a harmadikat a maradék 8 közül bármelyiknek stb., azaz összesen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki csak egy könyvet kaphat?

(ismétlés nélküli kombináció)

A kérdés az, hogy hányféleképpen választhatjuk ki a 10 ember közül azt a négyet, aki könyvet kap (mivel a könyvek egyformák, a kiválasztás sorrendje nem számít). Összesen "10 alatt a 4" = = $10!/(4! \cdot 6!) = 210$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?

(ismétléses variáció)

Mind a 4 könyvet kaphatja a 10 közül bármelyik ember, azaz összesen $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki több könyvet is kaphat?

(ismétléses kombináció)

1. megoldás: az ismétléses kombináció képlete nem érettségi anyag, de a következő gondolatmenet alapján megalkothatjuk az általános képletét. Szemléltessük a kiosztást a következőképpen: a 10 embert jelképezze 10 fehér golyó, a 4 könyvet pedig 4 fekete golyó. Rakjuk sorba a 10 fehér golyót, és mindegyik elé tegyünk annyi feketét, ahány könyvet kap a neki megfelelő ember. Pl. az első ember 1 könyvet kap, a negyedik kettőt, a tizedik pedig egyet: ●○○○●●○○○○○○●○
a lerakási szabályunk miatt a 10. fehér golyó után semmiképpen nem állhat fekete, így azt el is hagyhatjuk: ●○○○●●○○○○○○●
A könyveket tehát annyiféleképpen oszthatjuk ki, ahányféleképpen lehet 9 fehér és 4 fekete golyót sorba rendezni. Ezt $13!/(9!\cdot 4!)=715$-féleképpen tehetjük meg (ha az összes golyó különböző színű lenne, akkor $13\cdot 12\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=13!$ lehetőség volna. A 9 fehér golyót $9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=9!$, a 4 feketét pedig $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$-féleképpen lehet sorba rendezni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a 13! lehetőséget el kell osztani 9!-sal és 4!-sal).

2. megoldás: Vegyük sorra az összes lehetőséget:
Ha mind a 4 könyvet ugyanaz az ember kapja, akkor 10-féleképpen oszthatjuk ki.
Ha egy ember kap 3 könyvet, egy másik pedig 1-et, akkor 90-féleképpen oszthatjuk ki: a 3-könyvest 10, az 1-könyvest pedig a maradék 9 emberből választhatjuk ki, azaz összesen $10\cdot 9=90$ lehetőség van.
Ha 2 ember kap 2-2 könyvet, akkor 45-féleképpen oszthatjuk ki :"10 alatt a 2"= $=10!/(2!\cdot 8!)=45$-féleképpen választhatjuk a 10-ből azt a 2 embert, aki könyvet kap.
Ha 4 ember kap 1-1 könyvet, akkor 210 lehetőség van :"10 alatt a 4"$=10!/(4!\cdot 6!)=210$-féleképpen választhatjuk ki a 10-ből azt a 4 embert, aki könyvet kap.
Ha egy ember kap 2 könyvet, 2 pedig 1-1 könyvet, akkor 360 lehetőségünk van: a 2-könyvest 10 emberből választhatjuk ki, a két 1-könyvest pedig a maradék 9-ből ("9 alatt a 2"$=9!/(2!\cdot 7!)=$)36-féleképpen, azaz összesen $10\cdot 36=360$-féleképpen
választhatjuk ki a 3 emberünket.
Összesen tehát $10+90+45+210+360=715$ lehetőség van.