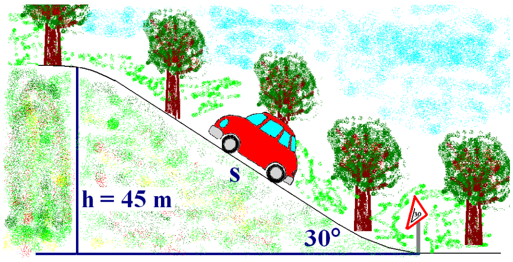
Hegyesszögek szögfüggvényei

Feladat:

Kovács család a hétvégén kirándulni ment.

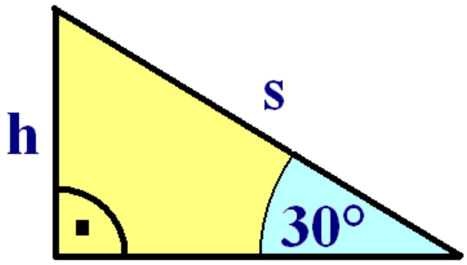
Az útjuk során egy 30°-os emelkedőhöz értek.

Milyen hosszú az emelkedő, ha magassága 45 méter?



Megoldás:

Rajzoljuk le a keletkezett háromszöget!



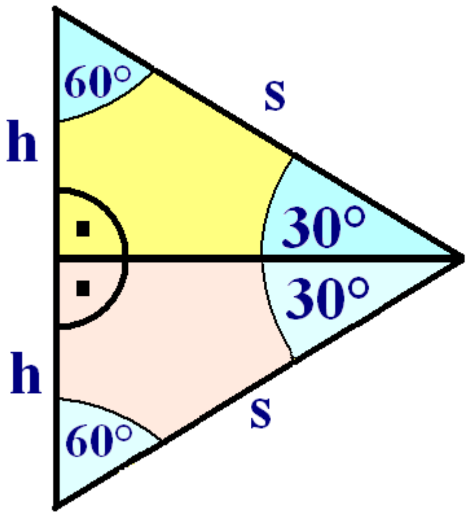
$\alpha = 30°$

$h = 45$ m

$s = ?$

Ilyen háromszöggel már találkoztunk.

Tükrözzük a hosszabbik befogó egyenesére!



Az eredeti háromszög és a képe egy egyenlő oldalú (szabályos) háromszöget alkot.

Ebből az

$$s = 2h = 2 \cdot 45\text{m}$$

$$\underline{s = 90\text{m}}$$

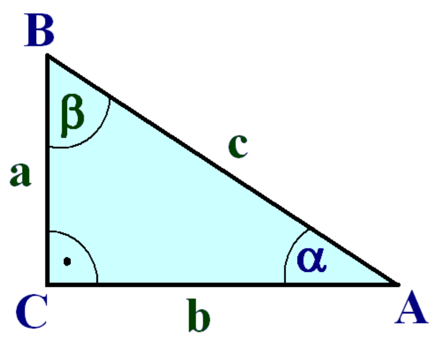
Tehát a lejtő hossza 90 méter.

Mi van akkor, ha a lejtő alappal bezárt szöge nem 30°-os, hanem 32°, 37,5°, 18,29° stb?

Ilyenkor már nem tudunk ilyen egyszerűen számolni, ezért vezessünk be egy új fogalmat, a szögfüggvényeket.

Hegyesszög szinusza

Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának az arányát az α szög szinuszának nevezzük.



Definíció: Derékszögű háromszögben egy hegyesszög szinusza a szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosa.

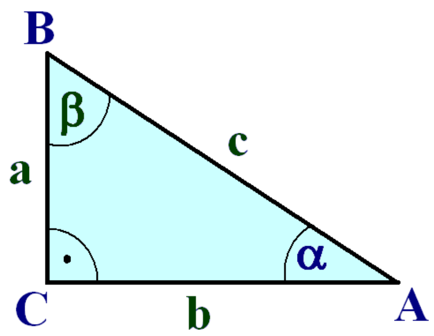
jele: sin α

$$\sin\alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

Hegyesszög koszinusza

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának az arányát az α szög koszinuszának nevezzük.



Definíció: Derékszögű háromszögben egy hegyesszög koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosa.

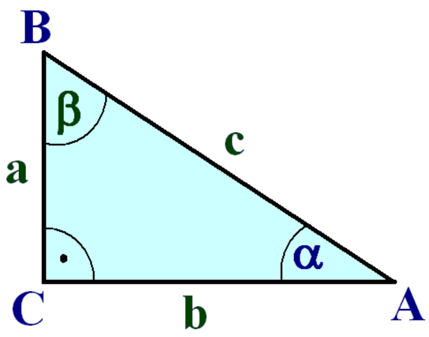
jele: cos α

$$\cos\alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

Hegyesszög tangense

Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az α hegyesszög melletti befogó hosszának az arányát az α szög tangensének nevezzük.



Definíció: Derékszögű háromszögben egy hegyesszög tangense a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hosszúságának a hányadosa.

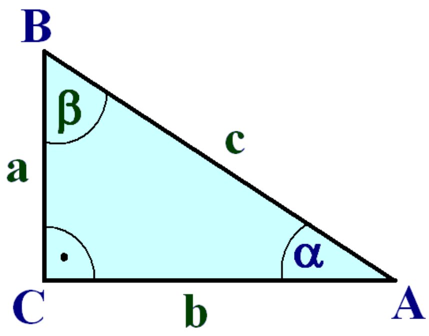
jele: tg α

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{az } \alpha \text{ szög melleti befogó hossza}}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{tg}\ \beta = \frac{b}{a}$$

Hegyesszög kotangense

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti befogó hosszának és az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának az arányát az α szög kotangenséneknevezzük.



Definíció: Derékszögű háromszögben egy hegyesszög kotangense a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hosszúságának a hányadosa.

jele: ctg α

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ melletti befogó hossza}}{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}}$$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{ctg}\ \beta = \frac{a}{b}$$

Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

Pótszögek szögfüggvényei

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta o \ \text{ mivel } \ \alpha + \beta = 90° \ \Rightarrow \ \sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \ \text{ mivel } \ \alpha + \beta = 90° \ \Rightarrow \ \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

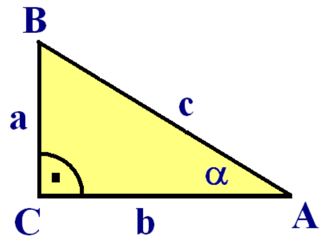
$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \text{ctg}\beta t \ \text{ mivel } \ \alpha + \beta = 90° \ \Rightarrow \ \text{tg}\alpha = \text{ctg}(90° - \alpha)$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \text{tg}\beta, \ \text{ mivel } \ \alpha + \beta = 90° \ \Rightarrow \ \text{ctg}\alpha = \text{tg}(90° - \alpha)$$

Bármely hegyesszög szinusza egyenlő pótszögének koszinuszával	$\sin \alpha = \cos (90° – \alpha)$
Bármely hegyesszög koszinusza egyenlő pótszögének szinuszával	$\cos \alpha = \sin (90° – \alpha)$
Bármely hegyesszög tangense egyenlő pótszögének kotangensével	$\text{tg}\, \alpha = \text{ctg}\, (90° – \alpha)$
Bármely hegyesszög kotangense egyenlő pótszögének tangensével	$\text{ctg}\, \alpha = \text{tg}\, (90° – \alpha)$

Pitagoraszi azonosság

Írjuk fel Pitagorasz-tételét az alábbi háromszögre:



$$a^2 + b^2 = c^2$$ osszuk el mindkét oldalt c^2-tel $(c^2 > 0)$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

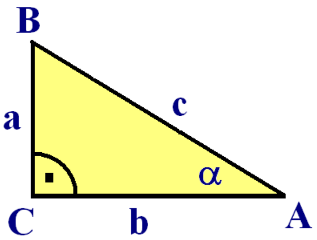
A hatványozás azonosságait, majd a szinusz és a koszinusz szögfüggvények definícióját alkalmazva:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Tétel: **Adott hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1-gyel egyenlő.**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A tangens és a kotangens kifejezése szinusszal és koszinusszal



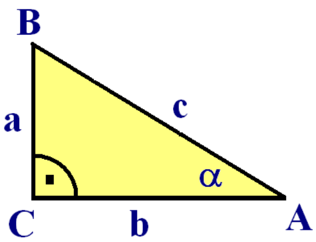
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Összefüggés a tangens és kotangens között



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

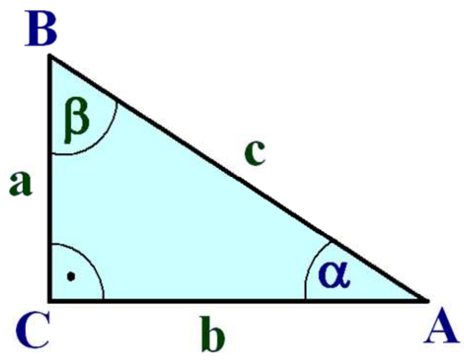
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

A tangens és a kotangens egymás reciprokai.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Az α szög szögfüggvényei

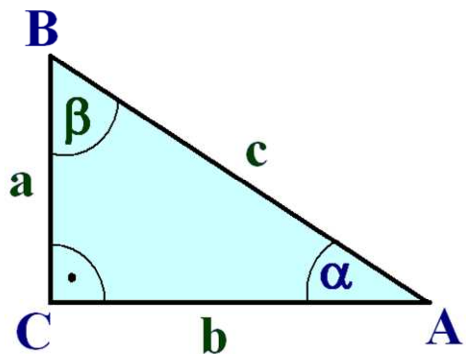


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Az β szög szögfüggvényei



$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

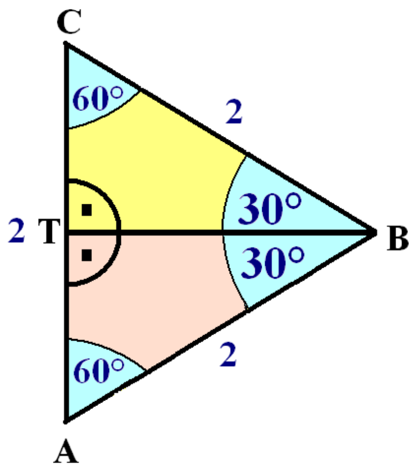
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

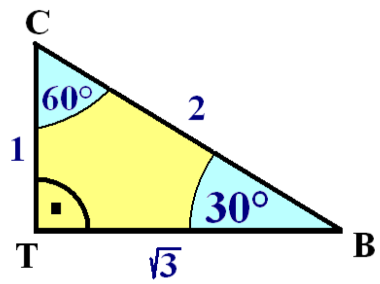
A 30°-os és 60°-os szögek szögfüggvényei

Rajzoljunk egy olyan egyenlő oldalú háromszöget, melynek oldalai 2 egység hosszúak.



Rajzoljuk meg az egyik csúcsából a magasságát.

Ekkor kapjuk a BCTΔ-et.



Az átfogója 2 egység hosszú, a rövidebbik befogója ennek a fele (1 egység) és Pitagorasz tételéből a hosszabbik befogó: $\sqrt{3}$ egység.

Szögei rendre 30°, 60°, 90°.

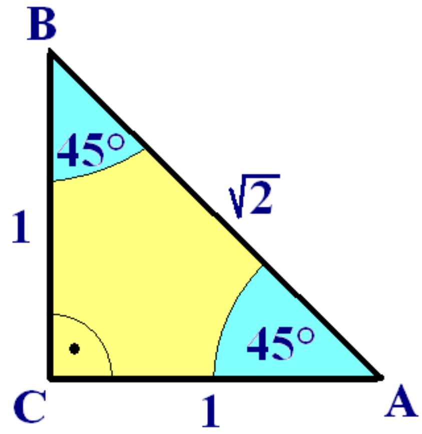
Így a definíciók alapján:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

A 45°-os szög szögfüggvényei

Rajzoljunk egységnyi oldalú derékszögű háromszöget.



A két befogója 1 – 1 egység hosszú és Pitagorasz tételéből az átfogója $\sqrt{2}$ egység hosszú.

Így a definíciók alapján:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

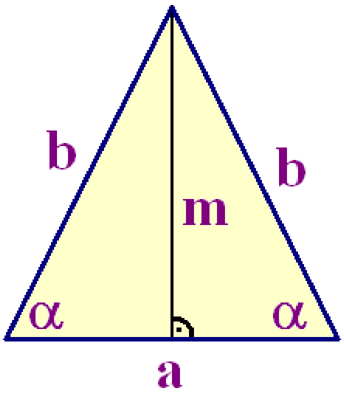
$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$$

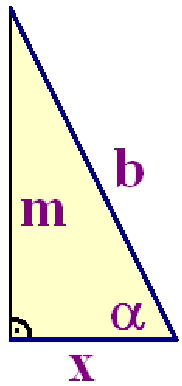
	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Feladat:

Határozzuk meg annak az egyenlőszárú háromszögnek a magasságát és alapjának hosszát, melynek alapján lévő szögeinek összege 130°, a szára 15 cm.

Megoldás:





2α = 130°

b= 15 cm

---

m = ?

a = ?

$$2\alpha = 130° \Rightarrow \alpha = 65°$$

$$\sin\alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 65° = \underline{\underline{13{,}59(\text{cm})}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\alpha = 15 \cdot \cos 65° = \underline{\underline{6{,}34(\text{cm})}}$$

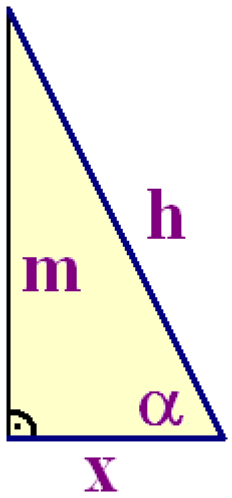
$$a = 2x = 2 \cdot 6{,}34 = \underline{\underline{12{,}68(\text{cm})}}$$

Tehát az egyenlő szárú háromszög magassága 13,59 cm, alapjának hossza 12,68 cm.

Feladat:

Egy 12m hosszú tűzoltólétra nekidől az égő ház falának, amivel embereket kell kimenteni az ablakon át. Az alja 5 m-re van a faltól. Határozd meg a létra dőlésszögét! Milyen magasan van az ablak?

Megoldás:



h= 12 m

x = 5 m

α = ?

m = ?

$$\cos\alpha = \frac{x}{h} = \frac{5}{12} = 0{,}4167 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{65{,}38°}}$$

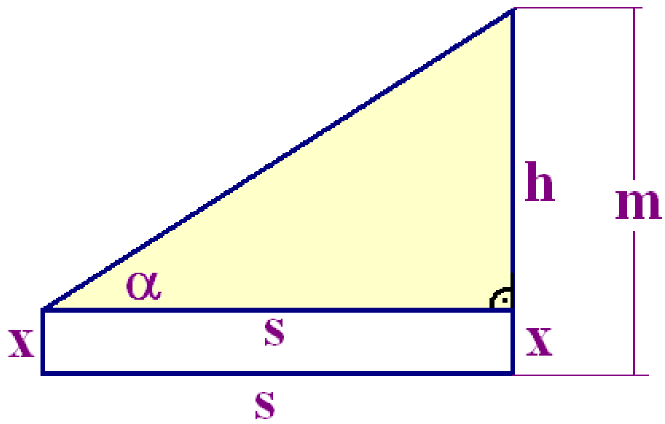
$$\sin\alpha = \frac{m}{h} \Rightarrow m = h \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin 65{,}35° = \underline{\underline{10{,}91(\mathrm{cm})}}$$

Tehát a létra dőlésszöge 65,38°, az ablak 10,91 m magasan van.

Feladat:

A 180 cm magas szemmagasságú ember 46°-os látószög alatt lát egy gyárkéményt. Milyen magas a kémény, ha a megfigyelő 78 m-re áll az épülettől?

Megoldás:



α= 46°

s = 78 m

x = 180 cm = 1,8 m

---

m = ?

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 78 \cdot \mathrm{tg}\,46° = 80{,}77(\mathrm{m})$$

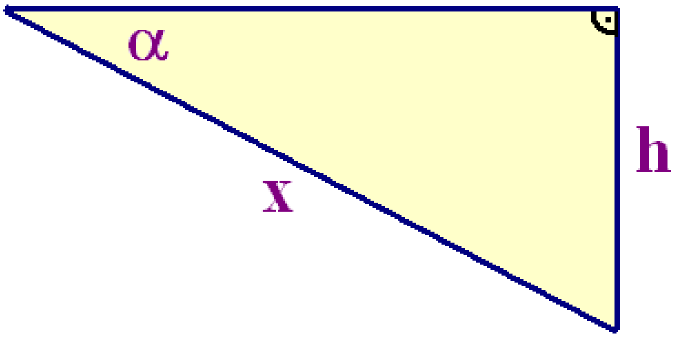
$$m = x + h = 1{,}8 + 80{,}77 = \underline{\underline{82{,}57(\mathrm{m})}}$$

Tehát a gyárkémény 82,57 m magas.

Feladat:

Milyen távolságra van tőlünk az a focilabda, amelyet a stadionban, a 25 m magas lelátóról 30 fokos depressziószögben látunk?

Megoldás:



$\alpha = 30°$

h = 25 m

x = ?

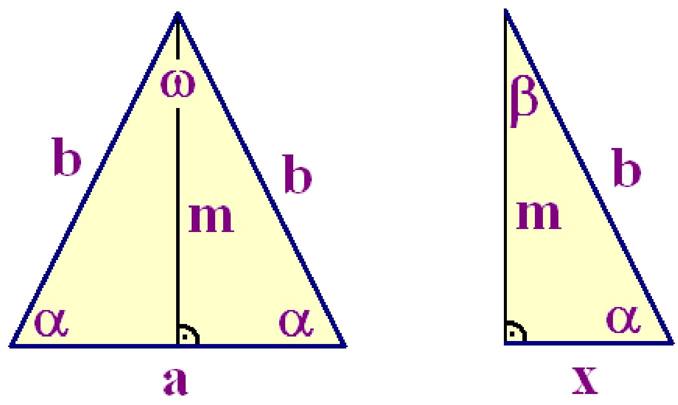
$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{25}{\sin 30°} = \underline{\underline{50(m)}}$$

Tehát a focilabda 50 méterre van tőlünk.

Feladat:

Egy egyenlő szárú létra összezárt állapotban 240 cm. Milyen magasan van a teteje kinyitott állapotban, ha a két szára 42°-os szöget zár be egymással?

Megoldás:



ω = 42°

b = 240 cm

---

m= ?

$$\varpi = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\varpi}{2} = \frac{42°}{2} = 21°$$

$$\cos\beta = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos\beta = 240 \cdot \cos 21° = \underline{\underline{224{,}06(\text{cm})}}$$

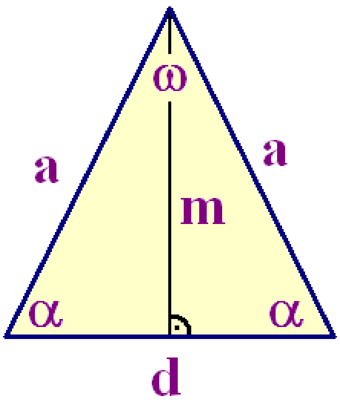
Tehát a létra teteje 224,06 cm magasan van.

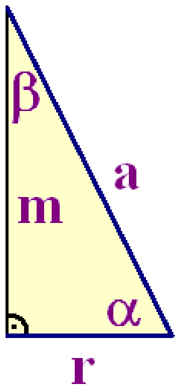
Feladat:

Egy forgáskúp alkotói 20 cm hosszúak, a kúp körének átmérője 28 cm. Mekkora a forgáskúp nyílásszöge és a magassága?

Megoldás:

A forgáskúp (alapjának átmérőjén átmenő) síkmetszete:





a = 20 cm

d = 28 cm

---

m= ?

ω = ?

$$d = 2r \Rightarrow r = \frac{d}{2} = \frac{28}{2} = 14(\text{cm})$$

$$\sin\beta = \frac{r}{a} = \frac{14}{20} = 0{,}7 \Rightarrow \beta = 44{,}43°$$

$$\varpi = 2\beta = 2 \cdot 44{,}43° = \underline{\underline{88{,}86°}}$$

$$\cos\beta = \frac{m}{a} \Rightarrow m = a \cdot \cos\beta = 20 \cdot \cos 44{,}43° = \underline{\underline{14{,}28(\text{cm})}}$$

Tehát a forgáskúp nyílásszöge 88.86°,

magassága 14.28 cm.